Relations algébriques entre différentes solutions d'une même équation différentielle

Guy Casale

IRMAR, Université de Rennes 1

- $P_I : y'' = 6y^2 + x$

Théorème (K. Nishioka - 2004)

Pour $y_1, \dots y_n$ des solutions distinctes de P_I on a

$$\mathrm{deg.tr.}_{\mathbb{C}(x)}\mathbb{C}(x)(y_1, y_1', \dots y_n, y_n') = 2n$$

Donner les $J \in \{II, \dots, VI\}$ et les paramètres α tels que pour n solutions disctinctes de $P_J(\alpha)$:

$$\mathrm{deg.tr.}_{\mathbb{C}(x)}\mathbb{C}(x)(y_1, y_1', \dots y_n, y_n') = \sum \mathrm{deg.tr.}_{\mathbb{C}(x)}\mathbb{C}(x)(y_i, y_i')$$

- $P_{II}(\alpha) : y'' = 2y^3 + xy + \alpha$
- $P_{III}(\alpha) : y'' = \frac{y'^2}{y} - \frac{y'}{x} + \frac{\alpha_1 y^2 + \alpha_2}{x} + \alpha_3 y^3 + \frac{\alpha_4}{y}$
- $\dots P_{IV}(\alpha), P_V(\alpha), P_{VI}(\alpha)$

Théorème (J. Nagloo & A. Pillay -2017)

Soient $J \in \{II, \dots VI\}$ et α algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.
Si $y_1, \dots y_n$ sont des solutions de $P_J(\alpha)$ telles que

$$\mathrm{deg.tr.}_{\mathbb{C}(x)}\mathbb{C}(x)(y_1, y_1', \dots y_n, y_n') < 2n$$

alors

- $\exists i, \mathrm{deg.tr.}_{\mathbb{C}(x)}\mathbb{C}(x)(y_i, y_i') < 2$
- $\exists i < j, \mathrm{deg.tr.}_{\mathbb{C}(x)}\mathbb{C}(x)(y_i, y_i', y_j, y_j') = 2$

Ils utilisent :

1. la classification des solutions classiques non algébriques (Nishioka, Umemura, Okamoto-Noumi, Watanabe ...)
2. le théorème de trichotomie DCF_0 (Hrushovski-Sokolovic)
3. élimination des quantificateurs dans $DCF_0 + (1)$.

Ils peuvent ensuite répondre en partie au problème, en utilisant cette fois la classification des solutions algébriques.

Théorème (J. Nagloo & A. Pillay -2014)

Soient $J \in \{II, \ldots V\}$ et α algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Si $y_1, \ldots y_n$ sont des solutions distinctes de $P_J(\alpha)$ alors

$$\mathrm{deg.tr.}_{\mathbb{C}(x)}\mathbb{C}(x)(y_1, y_1', \ldots y_n, y_n') = 2n$$

Une variation du théorème de Nagloo-Pillay

$$(X):\quad \begin{aligned} y_1^{(m-1)} &= f(x, y_1, \ldots, y_1^{(m-2)}), \\ &\vdots \\ y_n^{(m-1)} &= f(x, y_n, \ldots, y_n^{(m-2)}). \end{aligned}$$

Si le pseudo-groupe de Malgrange de X

= groupoide de Galois = groupe infinitesimal de Umemura

est suffisamment gros = dimension infini, simple et primitif

alors

si pour une solution $y(x)$ de $X^{(n)}$

$$\mathrm{deg.tr.}_{\mathbb{C}(x)}\mathbb{C}(x)(y_1, \ldots, y_1^{(m-2)}, \ldots, y_n, \ldots, y_n^{(m-2)}) < n(m-1)$$

alors

- $\exists i$, $\mathrm{deg.tr.}_{\mathbb{C}(x)}\mathbb{C}(x)(y_i, \ldots, y_i^{(m-2)}) < m-1$.
- $\exists i < j$, $\mathrm{deg.tr.}_{\mathbb{C}(x)}\mathbb{C}(x)(y_i, \ldots, y_i^{(m-2)}, y_j, \ldots, y_j^{(m-2)}) = m-1$

M une variété alg. sur $\mathbb{C}$, $\dim M = m$, $\mathbb{C}(M)$ corps des fonctions rationnelles,
X champ de vecteurs rationnel sur M.

Invariants différentiels de X

- $\partial_1, \dots \partial_m$ des symboles et $\mathbb{C}(M)_\infty$ le corps ∂-différentiel engendré par $\mathbb{C}(M)$.
- X_∞ l'extension de X qui commute aux ∂s
- $\mathrm{Inv}(X) = \{H \in \mathbb{C}(M)_\infty : X_\infty \cdot H = 0\}$

Exemple $M = \mathbb{A}^m$, $\mathbb{C}(M) = \mathbb{C}(x_1, \dots x_m)$, $X = \sum a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$

- $\mathbb{C}(M)_\infty = \mathbb{C}(x_{i,\alpha} | i = 1, \dots m; \alpha \in \mathbb{N}^m)$; $\partial_j(x_{i,\alpha}) = x_{i,\alpha+1_j}$
- $X_\infty = \sum \partial^\alpha(a_i) \frac{\partial}{\partial x_{i,\alpha}}$
- $L_X(\sum w_i(x) dx_i) = 0$ si et seulement si $\forall j,\ X_\infty \cdot \left(\sum w_i(x) x_{i,1_j}\right) = 0$.

Pour $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ un biholomorphisme entre ouverts de M, on note $\varphi^*_\infty : Mer(\mathcal{V})_\infty \to Mer(\mathcal{U})_\infty$ le morphisme prolongeant φ^* et commutant aux ∂s.

Definition

$$\mathrm{Mal}(X) = \{\varphi \mid \forall H \in \mathrm{Inv}(X)\ \varphi^*_\infty(H) = H\}$$

Exemple Si $L_X\omega = 0$ alors $\forall\varphi \in \mathrm{Mal}(X),\ \varphi^*\omega = \omega$.

Exemple $X = \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2(x)\frac{\partial}{\partial x_2} + a_3(x)\frac{\partial}{\partial x_3}$ et $\exists\theta$, 2-forme $d\theta = 0,\ i_X\theta = 0$.

$$\mathrm{Mal}(X) \subset \{\varphi \mid \varphi^*X = X, \varphi^*dx_1 = dx_1, \varphi^*\theta = \theta\}$$

En coordonnées x_1, y, z telles que $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$ et $\theta = dy \wedge dz$,

$$\varphi(x_1, y, z) = (x_1 + c, f(y,z), g(y,z)) \text{ avec } \frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)} = 1.$$

Les équations de Painlevé $P_J(\alpha)$ sont de tels exemples

- un champ de vecteur $X_J(\alpha) = \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + (\ldots\ldots) \frac{\partial}{\partial x_3}$
- une 2-forme fermée $\theta_J(\alpha)$ t.q. $i_{X_J(\alpha)}\theta_J(\alpha) = 0$

Théorème

$$\mathrm{Mal}(X_J(\alpha)) = \{\varphi \mid \varphi^* X_J(\alpha) = X_J(\alpha), \varphi^* dx_1 = dx_1, \varphi^*\theta_J(\alpha) = \theta_J(\alpha)\}$$

- *$J = I$*
- *$J = VI$ sauf paramètres de Picard (Cantat-Loray)*
- *$J = II$, $\alpha \in \mathbb{N}$ (+ Weil)*
- *tous les J, α général (Davy)*

- $\pi : M \to \mathbb{A}^1$ avec $d\pi(X) = \frac{\partial}{\partial x_1}$ et θ une $m-1$-forme fermée, $i_X\theta = 0$.
- $M^{(n)} = M \underset{\mathbb{A}^1}{\times} M^{(n-1)}$ et $X^{(n)}$ la "somme" de n copies de X sur $M^{(n)}$.

Théorème

Supposons $\mathrm{Mal}(X) = \{\varphi \mid \varphi^*X = X, \varphi^* dx_1 = dx_1, \varphi^*\theta = \theta\}$

Si $V \subsetneq M^{(n)}$ *est la clôture de Zariski d'une trajectoire de* $X^{(n)}$ *alors*

- $\exists i$, $pr_i(V) \subset M$ *est de dimension* $< m$
- $\exists i < j$, $pr_{i,j}(V) \subset M \underset{\mathbb{A}^1}{\times} M$ *est de dimension* m.

La preuve se fait par induction sur n en supposant que les projections $pr_1 : V \to M$ et $pr_{2,\ldots n} : V \to M^{(n-1)}$ sont dominantes.

Théorème

Si $\rho : M \dashrightarrow N$ est rationnelle dominante telle que $d\rho(X) = Y$ alors ρ induit un morphisme dominant $\rho_* : \mathrm{Mal}(X) \to \mathrm{Mal}(Y)$.

On a alors $(pr_i)_* : \mathrm{Mal}(X^{(n)}) \to \mathrm{Mal}(X)$ dominantes

Lemme

$\mathrm{Mal}(X^{(n)}) = \mathrm{Mal}(X)^{(n)}$

• Puisque $\mathrm{Mal}(X)$ est simple et les projections dominantes, il suffit de traiter le cas $n = 2$.
• Si l'inclusion est stricte, $\mathrm{Mal}(X^{(2)})$ on peut supposer $\mathrm{Mal}(X^{(2)})$ est le plongement diagonal de $\mathrm{Mal}(X)$ dans $\mathrm{Mal}(X)^{(2)}$.

• Lie, Cartan : Le plongement diagonal d'un pseudo-groupe de Lie est un pseudo-groupe de Lie si et seulement si il est de dimension finie.

Lemme

$pr_{2,\dots,n} : V \to M^{(n-1)}$ est génériquement finie.

Les fibres donnent une famille de dimension finie de sous-variétés de dimension $< m-1$ de M inclusent dans $x_1 = cste$ et invariantes sous $\mathrm{Mal}(X)$ .... qui agit transitivement sur les germes de courbes analytiques.

Lemme

Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage de codimension m de V $X^{(n)}$-invariant alors ses feuilles sont les fibres d'un pr_i, $i > 1$.

On utilise le même argument sur $M^{(n-1)}$ pour décrire les tissus invariants sous $Mal(X^{(n-1)})$

Appliqué au feuilletage de V par les fibres de pr_1, le lemme prouve le théorème.

Merci pour votre attention