EFI Anglet Juin 2019

UN PAS VERS LA LIBERTÉ

APRÈS

80 JOURS DE PRISON

ET

775 JOURS SANS PASSEPORT

Tuna ALTINEL
@TunaALTINEL

Je remercie tou-te-s celles et ceux qui ont été solidaires dans ce combat. Le combat pour la paix, la justice, la démocratie continue.

Comité de soutien à Tuna Altınel @SoutienTuna · 27 mai

Suite au jugement du TA du 25 janvier 2021, @TunaAltinel a récupéré son #PassportForTuna.

La Préfecture de Balıkesir ayant fait appel, ce jugement peut ne pas être définitif. Mais pour l'heure, en droit turc, prévaut la décision actuelle : Tuna possède un passeport valide. 😃

Afficher cette discussion

9:01 PM · 27 mai 2021 · Twitter Web App

Autour du groupe des automorphismes du corps des nombres complexes

Thomas Blossier

Journées GDR-EFI 31 mai - 2 juin 2021

Que peut-on dire sur $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$?

- $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\overline{\mathbb{Q}}) \lhd \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ est simple. (Lascar[1] 1992)

  1.« *J'ai peine à imaginer que ce fait n'est pas déjà connu, mais je ne connais pas [... de] référence (autre que le présent article)* »

- le quotient est isomorphe à $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q})$:
  - Conjecture (problème de la théorie de Galois inverse) : tout groupe fini correspond au groupe de Galois d'une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$.
  - Théorème de Shafarevich (1954/1989) : tout groupe résoluble fini apparaît comme quotient de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q})$.
  - ...

$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\overline{\mathbb{Q}})$ est simple et également $\mathrm{Aut}(\mathbb{K}/\,\mathrm{cl}(\emptyset))$ pour ...

Théorème (Lascar 1992)

Le groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(\mathbb{K}/\,\mathrm{cl}(\emptyset))$ *est simple pour*

- $\mathbb{K}$ *corps algébriquement clos dénombrable de degré de transcendance infini,*
- $\mathrm{cl}(\emptyset)$ *clôture algébrique du vide (c.à.d* $\overline{\mathbb{Q}}$ *en car.* 0, $\overline{\mathbb{F}_p}$ *en car.* p*).*

Preuve « topologique » : le groupe des automorphismes d'une structure dénombrable est un groupe polonais pour la topologie de la convergence simple. Lascar affirme que la preuve de son théorème (c.à.d. les arguments topologiques) s'étend(ent) en cardinalité supérieure avec l'hypothèse du continu.

Théorème (Lascar 1992)

Sous l'hypothèse du continu, $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\overline{\mathbb{Q}})$ *est simple.*

Seconde preuve « directe » et sans hypothèse du continu :

Théorème (Lascar 1997)

$\mathrm{Aut}(\mathbb{K}/\,\mathrm{cl}(\emptyset))$ *est simple pour* $\mathbb{K}$ *corps algébriquement clos non dénombrable.*
En particulier, $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\overline{\mathbb{Q}})$ *est simple.*

Généralisation dans le cas dénombrable (corps différentiels)

Théorème (Evans, Ghadernezhad, Tent 2016)

Soit $(\mathbb{K}, \delta)$ *un corps différentiellement clos dénombrable saturé de car.* 0. *Alors,*

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{K}/\operatorname{cl}(\emptyset)) \textit{ est simple}$$

où $\operatorname{cl}(\emptyset)$ *est l'ensemble des éléments de* $\mathbb{K}$ *satisfaisant une équation différentielle non triviale.*

- $\mathbb{K}$ *différentiellement clos* = *existentiellement clos* dans la classe des corps différentiels, c.à.d. tout système fini d'équations différentielles qui a une solution dans une extension a une solution dans $\mathbb{K}$.
- $\mathbb{K}$ *saturé* : si $k \subseteq \mathbb{K}$ est un *petit* sous-corps différentiel (algébriquement clos) et L une *petite* extension de k alors il existe un k-plongement de L dans K.

Généralisation dans le cas non dénombrable

Fixons un cardinal κ non dénombrable.

Théorème (B., Chatzidakis, Hardouin, Martin-Pizarro)

Soit $(\mathbb{K}, \delta)$ un corps différentiellement clos (resp. $(\mathbb{K}, \sigma)$ un corps aux différences générique) saturé de cardinalité κ (resp. κ-premier sur $\mathrm{cl}(\emptyset)$) et de caractéristique 0. Alors,

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{K}/\,\mathrm{cl}(\emptyset)) \text{ est simple}$$

où $\mathrm{cl}(\emptyset)$ est l'ensemble des éléments de $\mathbb{K}$ satisfaisant une équation différentielle (resp. aux différences) non triviale.

Éléments de la (seconde) preuve de Lascar

Notons $\mathfrak{S} = \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\overline{\mathbb{Q}})$ et considérons $g \in \mathfrak{S}$ différent de l'identité.

Théorème (Lascar 1997)

$$\mathfrak{S} = g^{\mathfrak{S}}\ (g^{-1})^{\mathfrak{S}}\ g^{\mathfrak{S}}\ (g^{-1})^{\mathfrak{S}}$$

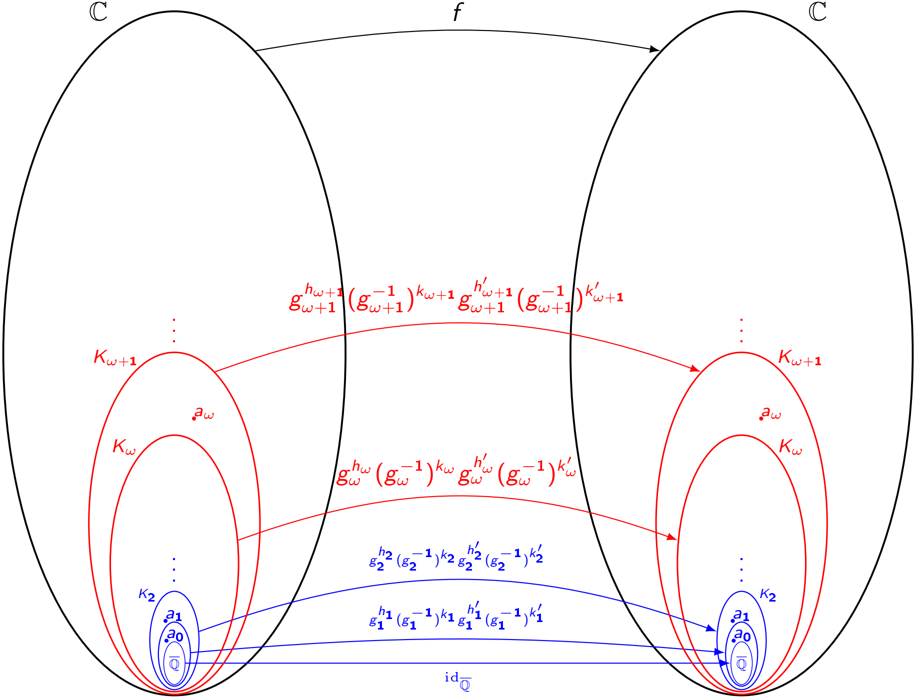
On approxime $f \in \mathfrak{S}$ sur des petits sous-corps de $\mathbb{C}$ par des produits de conjugués de g et g^{-1} compatibles : par récurrence transfinie sur $\alpha \in 2^{\aleph_0}$, on construit

- une suite croissante de petits sous-corps algébriquement clos K_α stables par g et f telle que $\mathbb{C} = \bigcup_{\alpha \in 2^{\aleph_0}} K_\alpha$
- des suites croissantes d'automorphismes partiels h_α, k_α, h'_α, k'_α de K_α telle que

$$f_\alpha = g_\alpha^{h_\alpha} (g_\alpha^{-1})^{k_\alpha} g_\alpha^{h'_\alpha} (g_\alpha^{-1})^{k'_\alpha} \text{ où } f_\alpha := f_{|K_\alpha},\ g_\alpha := g_{|K_\alpha}.$$

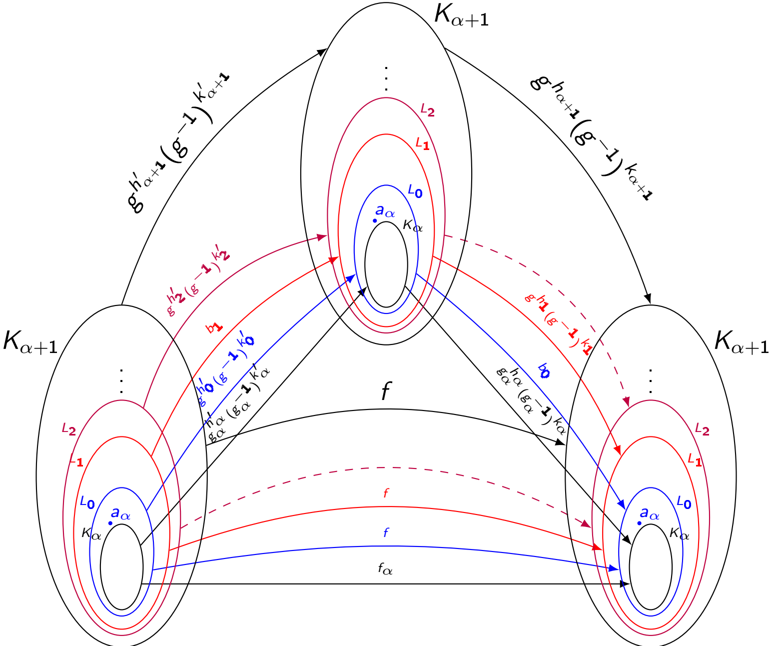
Alors

$$f = g^h (g^{-1})^k g^{h'} (g^{-1})^{k'} \text{ pour } h := \bigcup_{\alpha \in 2^{\aleph_0}} h_\alpha,\ k := \bigcup_{\alpha \in 2^{\aleph_0}} k_\alpha, \ldots$$



$\mathbb{C}$
f
$\mathbb{C}$
$g_{\omega+1}^{h_{\omega+1}}(g_{\omega+1}^{-1})^{k_{\omega+1}}g_{\omega+1}^{h'_{\omega+1}}(g_{\omega+1}^{-1})^{k'_{\omega+1}}$
$K_{\omega+1}$
a_ω
K_ω
$g_\omega^{h_\omega}(g_\omega^{-1})^{k_\omega}g_\omega^{h'_\omega}(g_\omega^{-1})^{k'_\omega}$
$g_2^{h_2}(g_2^{-1})^{k_2}g_2^{h'_2}(g_2^{-1})^{k'_2}$
K_2
a_1
a_0
$g_1^{h_1}(g_1^{-1})^{k_1}g_1^{h'_1}(g_1^{-1})^{k'_1}$
$\overline{\mathbb{Q}}$
$\mathrm{id}_{\overline{\mathbb{Q}}}$

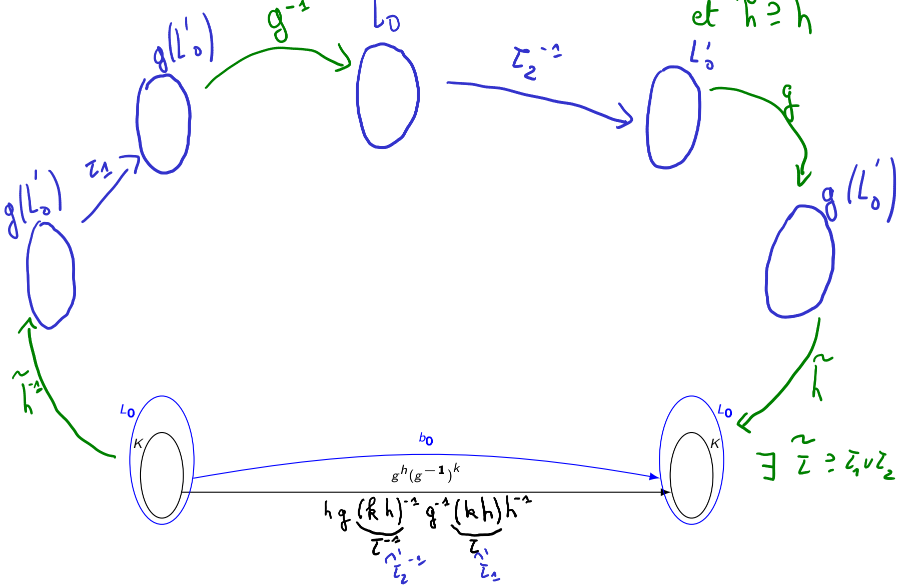
Étape successeur $\alpha \to \alpha + 1$



Étape successeur - cœur de la preuve

$L'_0 \underset{K}{\simeq} L_0$ tq $g(L'_0) \overset{Id}{\underset{K}{\downarrow}} L'_0$

$\tilde{h} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tq $\tilde{h}(g(L'_0)) = L_0$ et $\tilde{h} \simeq h$



$\exists\ \tilde{\tau} \simeq \tau_1 \vee \tau_2$

Étape successeur - ingrédients clés

Ingrédient 1

Soit $K \subseteq L \subseteq \mathbb{C}$ *deux petits sous-corps algébriquement clos. Il existe* $L' \subseteq \mathbb{C}$ *isomorphe à* L *au-dessus de* K *tel que* $L' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{\mathrm{ld}}_K g(L')$.

Cela suit du fait que g n'est pas *borné*.

Proposition

Si $K \subseteq \mathbb{C}$ *est un petit sous-corps algébriquement clos, il existe* $x \in \mathbb{C}$ *tel que* $g(x) \notin \overline{K(x)}$.

Ingrédient 2

Si $M_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{\mathrm{ld}}_K M_2$ *et* $\tau_i \in \mathrm{Aut}(M_i)$ *égaux sur* K, *alors il existe* $\tilde{\tau} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ *étendant* τ_1 *et* τ_2.

Preuve de g n'est pas borné

Lemme (Ziegler)

Soit $(G, \star)$ *un groupe algébrique (affine) défini sur* K *et* $\alpha, \beta \in G$ *tel* α, β *et* $\alpha \star \beta$ *sont deux à deux algébriquement indépendants au-dessus de* K.
Alors il existe un sous-groupe algébrique connexe $H \subset G$ *défini sur* K *tel* α, β *et* $\alpha \star \beta$ *sont des points génériques de translatés de* H *(également définis sur* K*).*

Soit a, b transc. sur $K \cup g^{-1}(K)$. Posons $\alpha = (a, g(a))$, $\beta = (b, g(b))$.

- $\alpha, \beta, \alpha+\beta$ sont 2 à 2 alg ind $\mathbb{K}$ donc génériques d'un translaté d'un sous-groupe alg. de $\mathbb{G}_a^2$. (1)

en car. 0 $\rightarrow$ $\exists \lambda \in K \setminus \{0\}$ et $\xi_a \in K$ tq $g(a) = \lambda . a + \xi_a$

- $\alpha, \beta, \alpha \cdot \beta$ sont 2 à 2 alg ind. $\mathbb{K}$ donc gén. d'un translaté d'un s.g. de $\mathbb{G}_m^2$

i.e. $a^m g^n(a) = \eta_a$ avec $\eta_a \in \mathbb{K}$ (2)

(1) dans (2) $\rightarrow$ $m = -n$ et $\xi_a = 0$

Alors, on a dem $g(b) = \lambda b$ et $g(ab) = \lambda a . b$

D'où $\lambda^2 = \lambda$ et ainsi $\lambda = 1$. $\rightarrow$ $g = id_{\mathbb{C}}$ $\rightarrow\leftarrow$