Sur l'indépendance linéaire de valeurs de G-fonctions

Gabriel Lepetit

Institut Fourier, Université Grenoble Alpes, Grenoble

1er juin 2021

G-fonctions

Notion introduite par Siegel (1929).

G-fonctions

Notion introduite par Siegel (1929).

G-fonction (au sens strict)

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ telle que

a) $\exists L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\mathrm{d}/\mathrm{d}z] \setminus \{0\} : Lf(z) = 0$ (D-finitude)

G-fonctions

Notion introduite par Siegel (1929).

G-fonction (au sens strict)

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ telle que

a) $\exists L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\mathrm{d}/\mathrm{d}z] \setminus \{0\} : Lf(z) = 0$ (D-finitude)

b) $\exists C_1 > 0 : \ \forall n \in \mathbb{N},\ \overline{|a_n|} \leqslant C_1^{n+1}$, où $\overline{|a_n|} := \max_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})} |\sigma(a_n)|$;

G-fonctions

Notion introduite par Siegel (1929).

G-fonction (au sens strict)

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]$ telle que

a) $\exists L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\mathrm{d}/\mathrm{d}z] \setminus \{0\} : Lf(z) = 0$ (D-finitude)

b) $\exists C_1 > 0 : \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \boxed{a_n} \leqslant C_1^{n+1}$, où $\boxed{a_n} := \max_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})} |\sigma(a_n)|$;

c) $\exists C_2 > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, \ \mathrm{den}(a_0, \dots, a_n) \leqslant C_2^{n+1}$, où $\mathrm{den}(a_0, \dots, a_n)$ est le dénominateur commun des a_i.

Propriétés :

- **a)** $\Rightarrow$ existence d'un prolongement analytique

G-fonctions

Notion introduite par Siegel (1929).

G-fonction (au sens strict)

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]$ telle que

a) $\exists L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\mathrm{d}/\mathrm{d}z] \setminus \{0\} : Lf(z) = 0$ (D-finitude)

b) $\exists C_1 > 0 : \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \boxed{a_n} \leqslant C_1^{n+1}$, où $\boxed{a_n} := \max_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})} |\sigma(a_n)|$;

c) $\exists C_2 > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, \ \mathrm{den}(a_0, \ldots, a_n) \leqslant C_2^{n+1}$, où $\mathrm{den}(a_0, \ldots, a_n)$ est le dénominateur commun des a_i.

Propriétés :

- **a)** $\Rightarrow$ existence d'un prolongement analytique
- L'ensemble des G-fonctions est un sous-anneau de $\overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]$ stable par $\mathrm{d}/\mathrm{d}z$ et $\int$.

Exemples :

- Polylogarithmes

$$\mathrm{Li}_s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}, \quad s \in \mathbb{N}^*$$

dont $\mathrm{Li}_1(z) = -\log(1-z)$ et la série « géométrique » $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

Exemples :

- Polylogarithmes

$$\mathrm{Li}_s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}, \quad s \in \mathbb{N}^*$$

dont $\mathrm{Li}_1(z) = -\log(1-z)$ et la série « géométrique » $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

- $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} z^n = \frac{2}{1+\sqrt{1-4z}}$$

Exemples :

- Polylogarithmes

$$\mathrm{Li}_s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}, \quad s \in \mathbb{N}^*$$

  dont $\mathrm{Li}_1(z) = -\log(1-z)$ et la série « géométrique » $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} z^n = \frac{2}{1+\sqrt{1-4z}}$
- tout $f \in \overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]$ algébrique sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ et holomorphe en 0.

Exemples :

- Polylogarithmes
$$\mathrm{Li}_s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}, \quad s \in \mathbb{N}^*$$
dont $\mathrm{Li}_1(z) = -\log(1-z)$ et la série « géométrique » $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} z^n = \frac{2}{1+\sqrt{1-4z}}$
- tout $f \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ algébrique sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ et holomorphe en 0.
- $\displaystyle\arctan(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$

Exemples :

- Polylogarithmes
$$\mathrm{Li}_s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}, \quad s \in \mathbb{N}^*$$
dont $\mathrm{Li}_1(z) = -\log(1-z)$ et la série « géométrique » $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} z^n = \frac{2}{1+\sqrt{1-4z}}$
- tout $f \in \overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]$ algébrique sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ et holomorphe en 0.
- $\displaystyle\arctan(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$

Exemples :

- $$ {}_nF_{n-1}(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\beta};z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\alpha_1)_m \ldots (\alpha_n)_m}{(\beta_1)_m \ldots (\beta_{n-1})_m m!} z^m $$

  pour $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^n$, $\boldsymbol{\beta} \in (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}_-)^{n-1}$, $(x)_m := x(x+1)\ldots(x+m-1)$.

Exemples :

- $$ {}_nF_{n-1}(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\beta};z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\alpha_1)_m \dots (\alpha_n)_m}{(\beta_1)_m \dots (\beta_{n-1})_m m!} z^m $$

  pour $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^n$, $\boldsymbol{\beta} \in (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}_-)^{n-1}$, $(x)_m := x(x+1)\dots(x+m-1)$.

Contre-exemples :

- $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ne vérifie pas **c)**.

Exemples :

- $$ {}_nF_{n-1}(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\beta};z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\alpha_1)_m \dots (\alpha_n)_m}{(\beta_1)_m \dots (\beta_{n-1})_m m!} z^m $$

  pour $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^n$, $\boldsymbol{\beta} \in (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}_-)^{n-1}$, $(x)_m := x(x+1)\dots(x+m-1)$.

Contre-exemples :

- $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ne vérifie pas **c)**.
- $J_0(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{4^n n!^2}$ (fonction de Bessel) ne vérifie pas **c)**.

Exemples :

- $$ {}_nF_{n-1}(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\beta};z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\alpha_1)_m \dots (\alpha_n)_m}{(\beta_1)_m \dots (\beta_{n-1})_m m!} z^m $$

  pour $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^n$, $\boldsymbol{\beta} \in (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}_-)^{n-1}$, $(x)_m := x(x+1)\dots(x+m-1)$.

Contre-exemples :

- $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ne vérifie pas **c)**.
- $J_0(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{4^n n!^2}$ (fonction de Bessel) ne vérifie pas **c)**.
- La fonction de Mahler $M(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ ne vérifie pas **a)**.

Théorème fondamental :

André-Chudnovsky-Katz

$f \neq 0$ G-fonction. $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\mathrm{d}/\mathrm{d}z] \setminus \{0\}$ tel que $Lf(z) = 0$ et **d'ordre minimal** μ pour f.

Au voisinage de tout $\alpha \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$, il existe une base de solutions de $Ly(z) = 0$

$$(f_1(z-\alpha), \dots, f_\mu(z-\alpha))(z-\alpha)^{C_\alpha}$$

Théorème fondamental :

André-Chudnovsky-Katz

$f \neq 0$ G-fonction. $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\mathrm{d}/\mathrm{d}z] \setminus \{0\}$ tel que $Lf(z) = 0$ et **d'ordre minimal** μ pour f.

Au voisinage de tout $\alpha \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$, il existe une base de solutions de $Ly(z) = 0$

$$(f_1(z-\alpha), \dots, f_\mu(z-\alpha))(z-\alpha)^{C_\alpha}$$

où

- $C_\alpha \in \mathscr{M}_\mu(\overline{\mathbb{Q}})$ est triangulaire supérieure à valeurs propres dans $\mathbb{Q}$ (liées aux *exposants* de L en α)

Théorème fondamental :

André-Chudnovsky-Katz

$f \neq 0$ G-fonction. $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\mathrm{d}/\mathrm{d}z] \setminus \{0\}$ tel que $Lf(z) = 0$ et **d'ordre minimal** μ pour f.

Au voisinage de tout $\alpha \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$, il existe une base de solutions de $Ly(z) = 0$

$$(f_1(z-\alpha), \dots, f_\mu(z-\alpha))(z-\alpha)^{C_\alpha}$$

où

- $C_\alpha \in \mathscr{M}_\mu(\overline{\mathbb{Q}})$ est triangulaire supérieure à valeurs propres dans $\mathbb{Q}$ (liées aux *exposants* de L en α)
- $f_i(u)$ G-fonctions.

Présentation du problème

- $\mathbb{K}$ corps de nombres
- $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k \in \mathbb{K}[\![z]\!] \setminus \mathbb{K}[z]$
- $L \in \mathbb{K}[z, \mathrm{d}/\mathrm{d}z] \setminus \{0\}$ opérateur tel que $L(F(z)) = 0$ d'ordre minimal μ.
- $\beta \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$,
- $$\forall n \in \mathbb{N}^*, s \in \mathbb{N}, \quad F_{\beta,n}^{[s]}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{(k+\beta+n)^s} z^{k+n}.$$

  G-fonctions liées à des primitives itérées de $F(z)$.
- **But :** trouver des bornes supérieures et inférieures sur la dimension de

  $$\Phi_{\alpha,\beta,S} := \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\left(F_{\beta,n}^{[s]}(\alpha),\ n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant s \leqslant S\right)$$

  quand $S \in \mathbb{N}$ suffisamment grand et $\alpha \in \mathbb{K}$, $0 < |\alpha| < R$ où R RCV de F.

Théorème

Pour S suffisamment grand et $\alpha \in \mathbb{K}$, $0 < |\alpha| < R$ où R RCV de F, on a

$$\frac{1+o(1)}{[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]C(F,\beta)} \log(S) \leqslant \dim_{\mathbb{K}} \Phi_{\alpha,\beta,S} \leqslant \ell_0(\beta)S + \mu.$$

Théorème

Pour S suffisamment grand et $\alpha \in \mathbb{K}$, $0 < |\alpha| < R$ où R RCV de F, on a

$$\frac{1+o(1)}{[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]C(F,\beta)} \log(S) \leqslant \dim_{\mathbb{K}} \Phi_{\alpha,\beta,S} \leqslant \ell_0(\beta)S + \mu.$$

- si $\delta = \deg_z(L)$ et ω est l'ordre de 0 en tant que singularité de L, $\ell_0(\beta)$ est le maximum de $\ell := \delta - \omega$ et des $f - \beta$ quand f exposant de L en ∞ tel que $f - \beta \in \mathbb{N}$;
- $C(F,\beta) > 0$ constante dépendant de F et β, et pas de α.

Théorème

Pour S suffisamment grand et $\alpha \in \mathbb{K}$, $0 < |\alpha| < R$ où R RCV de F, on a

$$\frac{1+o(1)}{[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]C(F,\beta)}\log(S) \leqslant \dim_{\mathbb{K}} \Phi_{\alpha,\beta,S} \leqslant \ell_0(\beta)S + \mu.$$

- si $\delta = \deg_z(L)$ et ω est l'ordre de 0 en tant que singularité de L, $\ell_0(\beta)$ est le maximum de $\ell := \delta - \omega$ et des $f - \beta$ quand f exposant de L en ∞ tel que $f - \beta \in \mathbb{N}$;
- $C(F,\beta) > 0$ constante dépendant de F et β, et pas de α.

Si $F(z) \in \mathbb{K}[z]$, $\Phi_{\alpha,\beta,S} \subset \mathbb{K}$.

Cas particuliers :

- $\beta = 0$: déjà prouvé par Fischler et Rivoal.

Cas particuliers :

- $\beta = 0$: déjà prouvé par Fischler et Rivoal.
- $A_k = 1$: résultats de Rivoal ($\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$) et Marcovecchio sur la dimension du $\mathbb{K}$-espace vectoriel engendré par $\mathrm{Li}_s(\alpha)$, $0 \leqslant s \leqslant S$, pour $\alpha \in \mathbb{K}$, $0 < |\alpha| < 1$.

Cas particuliers :

- $\beta = 0$: déjà prouvé par Fischler et Rivoal.
- $A_k = 1$: résultats de Rivoal ($\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$) et Marcovecchio sur la dimension du $\mathbb{K}$-espace vectoriel engendré par $\mathrm{Li}_s(\alpha)$, $0 \leqslant s \leqslant S$, pour $\alpha \in \mathbb{K}$, $0 < |\alpha| < 1$.
- Fischler et Rivoal : le théorème principal est aussi vrai pour $\beta = 0$ et α dans un ouvert étoilé en 0 contenant strictement le disque de convergence de F.

2 objectifs :

1. Prouver le théorème précédent en suivant et en adaptant la preuve de Fischler et Rivoal.

2 objectifs :

1. Prouver le théorème précédent en suivant et en adaptant la preuve de Fischler et Rivoal.
2. Trouver une expression explicite pour $C(F,\beta)$: n'avait pas été fait par Fischler et Rivoal dans le cas $\beta = 0$.

Borne inférieure

On prouve, à l'aide du théorème d'André-Chudnovsky Katz qu'il existe $\kappa_{j,t,s,n,\beta} \in \mathbb{K}$ et $K_{j,s,n,\beta}(z) \in \mathbb{K}[z]$ tels que

$$F_{\beta,n}^{[s]}(z) = \sum_{t=1}^{s} \sum_{j=1}^{\ell_0(\beta)} \kappa_{j,t,s,n,\beta} F_{\beta,j}^{[t]}(z) + \sum_{j=0}^{\mu-1} K_{j,s,n,\beta}(z)(\theta^j F)(z)$$

où $\mu = \mathrm{ord}\,(L)$ et $\theta = z\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$.
Ainsi, si $\alpha \in \mathbb{K} \cap D(0,R)$,

$$\Phi_{\alpha,\beta,S} := \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\left(F_{\beta,n}^{[s]}(\alpha), 1 \leqslant s \leqslant S, n \in \mathbb{N}^*\right)$$
$$= \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\left(F_{\beta,j}^{[t]}(\alpha), 1 \leqslant t \leqslant S, 1 \leqslant j \leqslant \ell_0(\beta)\right) + \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\left((\theta^j F)(\alpha), 0 \leqslant j \leqslant \mu - 1\right)$$

et $\dim_K \Phi_{\alpha,\beta,S} \leqslant \ell_0(\beta) S + \mu$.

Borne supérieure

Idée essentielle : introduire une série auxiliaire adaptée pour pouvoir appliquer le critère d'indépendance linéaire suivant :

Théorème (Fischler-Rivoal)

Si $0 < a < 1 < b$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ tels que

1. $\forall j, \lceil \overline{p_{j,n}} \rceil \leqslant b^{n(1+o(1))}$ où $\lceil \overline{x} \rceil := \max_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})} |\sigma(x)|$ (*maison* de x).

Borne supérieure

Idée essentielle : introduire une série auxiliaire adaptée pour pouvoir appliquer le critère d'indépendance linéaire suivant :

Théorème (Fischler-Rivoal)

Si $0 < a < 1 < b$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ tels que

1. $\forall j, \boxed{p_{j,n}} \leqslant b^{n(1+o(1))}$ où $\boxed{x} := \max\limits_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})} |\sigma(x)|$ (*maison* de x).
2. $$\sum_{j=1}^{N} p_{j,n}\theta_j = a^n n^\kappa \log(n)^\lambda \left(\sum_{t=1}^{T} c_t \zeta_t^n + o(1) \right).$$

Borne supérieure

Idée essentielle : introduire une série auxiliaire adaptée pour pouvoir appliquer le critère d'indépendance linéaire suivant :

Théorème (Fischler-Rivoal)

Si $0 < a < 1 < b$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ tels que

1. $\forall j, \boxed{p_{j,n}} \leqslant b^{n(1+o(1))}$ où $\boxed{x} := \max_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})} |\sigma(x)|$ (*maison* de x).
2. $$\sum_{j=1}^{N} p_{j,n}\theta_j = a^n n^\kappa \log(n)^\lambda \left(\sum_{t=1}^{T} c_t \zeta_t^n + o(1) \right).$$
3. Les ζ_t sont deux à deux distincts et $|\zeta_t| = 1$.

Borne supérieure

Idée essentielle : introduire une série auxiliaire adaptée pour pouvoir appliquer le critère d'indépendance linéaire suivant :

Théorème (Fischler-Rivoal)

Si $0 < a < 1 < b$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ tels que

1. $\forall j, \lceil p_{j,n} \rceil \leqslant b^{n(1+o(1))}$ où $\lceil x \rceil := \max_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})} |\sigma(x)|$ (*maison* de x).
2. $$\sum_{j=1}^{N} p_{j,n}\theta_j = a^n n^\kappa \log(n)^\lambda \left(\sum_{t=1}^{T} c_t \zeta_t^n + o(1) \right).$$
3. Les ζ_t sont deux à deux distincts et $|\zeta_t| = 1$.

Alors
$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Vect}(\theta_1, \ldots, \theta_N) \geqslant \frac{1}{[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]}\left(1 - \frac{\log(a)}{\log(b)}\right).$$

Généralisation d'un critère de Nesterenko.

Canevas de preuve :
Pour $S \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N}$ tel que $r \leqslant S$, soit

$$T_{S,r,n}(z) := n!^{S-r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k-rn+1)_{rn}}{(k+1+\beta)_{n+1}^{S}} A_k z^{-k}$$

où $(x)_n = x(x+1)\dots(x+n-1)$.

i) Pour $n \geqslant \ell_0(\beta)$, il existe $C_{u,s,n}(z) \in \mathbb{K}[z]$ et $\tilde{C}_{u,n}(z) \in \mathbb{K}[z]$ tels que

$$T_{S,r,n}(z) = \sum_{u=1}^{\ell_{\mathbf{0}}(\beta)} \sum_{s=1}^{S} C_{u,s,n}(z) F_{\beta,u}^{[s]}\left(\frac{1}{z}\right) + \sum_{u=0}^{\mu-1} \widetilde{C}_{u,n}(z) z^{-S(\ell-1)} (\theta^u F)\left(\frac{1}{z}\right).$$

Canevas de preuve :
Pour $S \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N}$ tel que $r \leqslant S$, soit

$$T_{S,r,n}(z) := n!^{S-r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k-rn+1)_{rn}}{(k+1+\beta)_{n+1}^{S}} A_k z^{-k}$$

où $(x)_n = x(x+1)\dots(x+n-1)$.

i) Pour $n \geqslant \ell_0(\beta)$, il existe $C_{u,s,n}(z) \in \mathbb{K}[z]$ et $\tilde{C}_{u,n}(z) \in \mathbb{K}[z]$ tels que

$$T_{S,r,n}(z) = \sum_{u=1}^{\ell_0(\beta)} \sum_{s=1}^{S} C_{u,s,n}(z) F_{\beta,u}^{[s]}\left(\frac{1}{z}\right) + \sum_{u=0}^{\mu-1} \widetilde{C}_{u,n}(z) z^{-S(\ell-1)} (\theta^u F)\left(\frac{1}{z}\right).$$

ii) Pour $z \in \mathbb{K}$, on borne les maisons (resp. les dénominateurs) de $C_{u,s,n}(z)$ et $\tilde{C}_{u,n}(z)$ par des suites $b_1^{n(1+o(1))}$ (resp. $b_2^{n(1+o(1))}$).

iii) On exprime $T_{S,r,n}(1/\alpha)$ en fonctions d'intégrales

$$\mathscr{B}_{S,r,n,j}(\alpha) = (2\pi)^{(S-r+2)/2}\kappa_j \frac{\log(n)^{s_j}}{n^{(S+r)/2+b_j}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} g_{j,\beta}(t) e^{n\varphi(-\alpha/\xi_j,t)}\left(1+O\left(\frac{1}{\log(n)}\right)\right)\mathrm{d}t$$

iii) On exprime $T_{S,r,n}(1/\alpha)$ en fonctions d'intégrales

$$\mathscr{B}_{S,r,n,j}(\alpha) = (2\pi)^{(S-r+2)/2}\kappa_j \frac{\log(n)^{s_j}}{n^{(S+r)/2+b_j}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} g_{j,\beta}(t) e^{n\varphi(-\alpha/\xi_j,t)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\log(n)}\right)\right) \mathrm{d}t$$

iv) On applique la méthode du col à $\mathscr{B}_{S,r,n,j}(\alpha)$ et on choisit $r = \lfloor S/\log(S)^2 \rfloor$ pour obtenir

$$T_{S,r,n}(1/\alpha) = a^n n^\kappa \log(n)^\lambda \left(\sum_{q=1}^{Q} c_{q,\beta}\zeta_q^n + o(1)\right), \;\; n \to \infty,$$

où $0 < a \leqslant r^{r-S}$, $|\zeta_q| = 1$, les ζ_q sont 2 à 2 distincts et $c_{q,\beta} \neq 0$.

v) On applique le critère d'indépendance linéaire précédent grâce aux étapes **ii)** et **iv)**.

Explicitation des constantes

On peut trouver $Q_j(X) \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[X]$ et $u \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$uz^{\mu-\omega}L = \sum_{j=0}^{\ell} z^j Q_j(\theta + j), \tag{1}$$

où $\theta = z\mathrm{d}/\mathrm{d}z$, $\mu = \mathrm{ord}\,(L)$, ω la multiplicité de 0 en tant que singularité de L et $\ell = \deg_z(L) - \omega$

Alors

$$L_\beta := uz^{\mu-\omega} z^\beta L z^{-\beta} \sum_{j=0}^{\ell} z^j Q_j(\theta + \beta + j).$$

Soit $(u_{1,\beta}(n))_{n \geqslant m}, \ldots, (u_{\ell,\beta}(n))_{n \geqslant m}$ une base de solutions de

$$\forall n \geqslant m\,, \quad \sum_{j=0}^{\ell} Q_j(-n-\beta)u(n+j) = 0.$$

Soit $(u_{1,\beta}(n))_{n\geqslant m},\dots,(u_{\ell,\beta}(n))_{n\geqslant m}$ une base de solutions de

$$\forall n \geqslant m\,, \quad \sum_{j=0}^{\ell} Q_j(-n-\beta)u(n+j)=0.$$

Soit

$$W_\beta(n) := \begin{vmatrix} u_{1,\beta}(n+\ell-1) & \cdots & u_{\ell,\beta}(n+\ell-1) \\ u_{1,\beta}(n+\ell-2) & \cdots & u_{\ell,\beta}(n+\ell-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{1,\beta}(n) & \cdots & u_{\ell,\beta}(n) \end{vmatrix}$$

et $(-1)^j D_{j,\beta}(n)$ le mineur obtenu en enlevant la première ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne de $W_\beta(n)$.

Proposition

On peut prendre dans le théorème principal

$$C(F,\beta) = \log(2eC_1(F,\beta)C_2(F,\beta))$$

où $C_2(F,\beta)$ (resp. $C_1(F,\beta)$) est une borne supérieure sur $\limsup_{n\to+\infty} \delta_n^{3/n}$ (resp. $\limsup_{n\to+\infty} M_n^{1/n}$), où δ_n (resp. M_n) est un dénominateur commun (resp. le maximum des valeurs absolues) des

$$\frac{1}{W_\beta(k)}, \ \frac{D_{j,\beta}(k)}{Q_\ell(1-k-\beta)}, \ u_{j,\beta}(k), \quad k \in \{m,\dots,n\}, \ j \in \{1,\dots,\ell\}.$$

$$\forall n \geqslant m\,, \quad \sum_{j=0}^{\ell} Q_j(-n-\beta)u(n+j) = 0. \tag{2}$$

$(u_n)_n$ est solution de (2) ssi $\widetilde{L}_\beta(U(z^{-1})) = 0$ où

$$\widetilde{L}_\beta = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{\ell} z^{m-1} L_\beta$$

et $U(z) = \sum_{n=m}^{\infty} u_n z^n$.

$$\forall n \geqslant m\,, \quad \sum_{j=0}^{\ell} Q_j(-n-\beta)u(n+j) = 0. \tag{2}$$

$(u_n)_n$ est solution de (2) ssi $\widetilde{L}_\beta(U(z^{-1})) = 0$ où

$$\widetilde{L}_\beta = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{\ell} z^{m-1} L_\beta$$

et $U(z) = \sum_{n=m}^{\infty} u_n z^n$.

Pour calculer $C_2(F,\beta)$, on veut donc trouver une borne sur $\mathrm{den}(u_0,\ldots,u_n)$ quand $U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ vérifie $\widetilde{L}_{\beta,\infty}(U(z)) = 0$, où $\widetilde{L}_{\beta,\infty}$ est l'opérateur obtenu à partir de $\widetilde{L}_\beta$ par changement de variable $u = 1/z$.

Un outil : la taille

Définition

Soit $G \in \mathscr{M}_\mu(\mathbb{K}(z))$. On prend G_s telle que $y' = Gy \Rightarrow y^{(s)} = G_s y$. La *taille* de G est

$$\sigma(G) := \limsup_{s \to +\infty} \frac{1}{s} \sum_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_\mathbb{K})} \sup_{m \leqslant s} \log^+ \left\| \frac{G_m}{m!} \right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}},$$

avec $\log^+ : x \mapsto \log(\max(1, x))$. La taille d'un opérateur est celle de sa matrice compagnon.

Un outil : la taille

Définition

Soit $G \in \mathscr{M}_\mu(\mathbb{K}(z))$. On prend G_s telle que $y' = Gy \Rightarrow y^{(s)} = G_s y$. La *taille* de G est

$$\sigma(G) := \limsup_{s \to +\infty} \frac{1}{s} \sum_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_\mathbb{K})} \sup_{m \leqslant s} \log^+ \left\| \frac{G_m}{m!} \right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}},$$

avec $\log^+ : x \mapsto \log(\max(1, x))$. La taille d'un opérateur est celle de sa matrice compagnon.

La *taille* de $Y = \sum_{m=0}^{\infty} Y_m z^m, Y_m \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est

$$\sigma(Y) := \limsup_{s \to +\infty} \frac{1}{s} \sum_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_\mathbb{K})} \sup_{m \leqslant s} \log^+ \|Y_m\|_{\mathfrak{p}}.$$

Étapes de la méthode

$U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ solution de $\widetilde{L}_{\beta,\infty}(U(z)) = 0$

Étapes de la méthode

$U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ solution de $\widetilde{L}_{\beta,\infty}(U(z)) = 0$

i) Borner $\mathrm{den}(u_0, \ldots, u_s)$ en fonction de $\sigma(U)$:

$$\mathrm{den}(u_0, \ldots, u_s) \leqslant \exp([\mathbb{K} : \mathbb{Q}]\sigma(U))$$

Étapes de la méthode

$U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ solution de $\widetilde{L}_{\beta,\infty}(U(z)) = 0$

i) Borner $\mathrm{den}(u_0, \dots, u_s)$ en fonction de $\sigma(U)$:

$$\mathrm{den}(u_0, \dots, u_s) \leqslant \exp([\mathbb{K} : \mathbb{Q}]\sigma(U))$$

ii) Borner $\sigma(U)$ en fonction de $\sigma(\widetilde{L}_{\beta,\infty})$ (Dwork) :

$$\begin{aligned}\sigma(U) \leqslant (\mu+\ell)^2\sigma(\widetilde{L}_{\beta,\infty}) + (\mu+\ell)^2 + \mu + \ell - 1 + (\mu+\ell)(\mu+\ell-1)\\ H(\mathrm{den}(f_1, \dots, f_\ell)\mathrm{den}(\beta)) + ((\mu+\ell)^2+1) \sum_{\zeta \neq 0,\infty} h(1/\zeta),\end{aligned} \quad (3)$$

où :

Étapes de la méthode

$U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ solution de $\widetilde{L}_{\beta,\infty}(U(z)) = 0$

i) Borner $\mathrm{den}(u_0, \dots, u_s)$ en fonction de $\sigma(U)$:

$$\mathrm{den}(u_0, \dots, u_s) \leqslant \exp([\mathbb{K} : \mathbb{Q}]\sigma(U))$$

ii) Borner $\sigma(U)$ en fonction de $\sigma(\widetilde{L}_{\beta,\infty})$ (Dwork) :

$$\sigma(U) \leqslant (\mu+\ell)^2\sigma(\widetilde{L}_{\beta,\infty}) + (\mu+\ell)^2 + \mu + \ell - 1 + (\mu+\ell)(\mu+\ell-1) \\ H(\mathrm{den}(f_1, \dots, f_\ell)\mathrm{den}(\beta)) + ((\mu+\ell)^2+1) \sum_{\zeta \neq 0,\infty} h(1/\zeta), \quad (3)$$

où :

- la somme porte sur les racines $\neq 0$ de $\chi_L(z) \in \mathbb{K}[z]$ ne dépendant que de L ;
- $f_1, \dots, f_\ell$: exposants de L en ∞ ;
- $H(N) := \dfrac{N}{\varphi(N)} \sum_{(j,N)=1} \dfrac{1}{j}$, φ indicatrice d'Euler.

iii) $\sigma(\widetilde{L}_{\beta,\infty}) = \sigma(\widetilde{L}_{\beta})$

iii) $\sigma(\widetilde{L}_{\beta,\infty}) = \sigma(\widetilde{L}_{\beta})$

iii) $\sigma(\widetilde{L}_{\beta,\infty}) = \sigma(\widetilde{L}_{\beta})$

iv) Borner la taille d'un produit (L.) :

$$\sigma(\widetilde{L}_{\beta}) = \sigma\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{\ell} L_{\beta}\right) \leqslant \ell + \sigma(L_{\beta}) \tag{4}$$

iii) $\sigma(\widetilde{L}_{\beta,\infty}) = \sigma(\widetilde{L}_{\beta})$

iv) Borner la taille d'un produit (L.) :

$$\sigma(\widetilde{L}_{\beta}) = \sigma\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{\ell} L_{\beta}\right) \leqslant \ell + \sigma(L_{\beta}) \tag{4}$$

v) Borner $\sigma(L_{\beta})$ en fonction de $\sigma(L)$ (L.) :

$$\sigma(L_{\beta}) \leqslant \big(1 + \log(2)\big) \max\left(1, 2\log(\mathrm{den}(\beta)), \sigma(L)\right) \tag{5}$$

Exemples

1. $\Phi_s(z,\beta) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+\beta)^s}$ (fonction zêta de Lerch). Pour $0 < |\alpha| < 1, \alpha \in \mathbb{Q}$ Au moins $\frac{1+o(1)}{28.01}\log(S)$ des $\Phi_s(\alpha, 1/2)$, $0 \leqslant s \leqslant S$, sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

Exemples

1. $\Phi_s(z,\beta) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+\beta)^s}$ (fonction zêta de Lerch). Pour $0 < |\alpha| < 1, \alpha \in \mathbb{Q}$ Au moins $\frac{1+o(1)}{28.01} \log(S)$ des $\Phi_s(\alpha, 1/2)$, $0 \leqslant s \leqslant S$, sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

2. Si $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ et $0 < |\alpha| < 1$, au moins $\frac{1+o(1)}{2443[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]} \log(S)$ des
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1/3)_k (2/11)_k}{k!(1/6)_k} \frac{z^k}{(7k+1)^s}, \quad 0 \leqslant s \leqslant S$$
sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}(\alpha)$.

1.
2.
3. La dimension sur $\mathbb{Q}(\alpha)$ de l'e.v. engendré par

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}^2\binom{k+j}{j}^2\frac{\alpha^k}{(3k+5)^s} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}^2\binom{k+j}{j}^2\frac{\alpha^k}{(3k+8)^s},$$

$0 \leqslant s \leqslant S$, est au moins $\dfrac{1+o(1)}{209532[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]}\log(S)$

Merci pour votre attention !